Lösung zu Aufgabe 1 / Übungsblatt 3

Kugelsymmetrisches Problem:

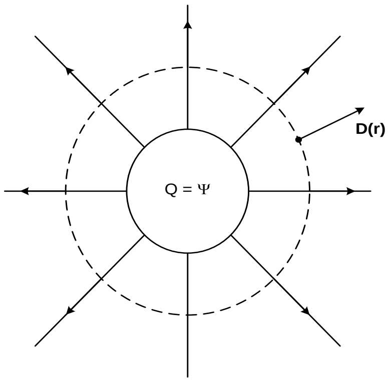


Bild: Feld einer positiven Punktladung
→ Q = el. Ladung, D = el. Flussdichte

Satz vom Hüllenfluß:

$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = Q = \Psi$$

$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = D(r) \oiint_A dA$$

D ist auf der Hüllfläche konstant und aus Symmetriegründen nur von r abhängig

$$= D(r) \bullet A(r)$$

($\oiint_A dA$ entspricht der Kugelfläche einer Kugel mit dem Radius r)

$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = D(r) \bullet 4\pi r^2$$

$$D(r) \bullet 4\pi r^2 = Q$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Feldstärkefunktion:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

Potentialfunktion:

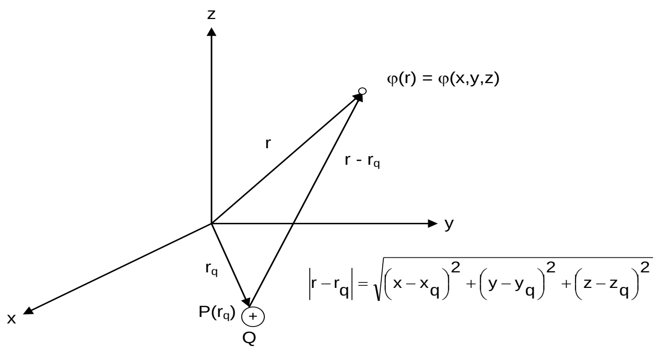
$$\varphi(r) = -\int E(r)dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + C$$

per Definitionem:

$$\varphi(\infty) = 0$$

$$\rightarrow \ \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

Lage der Punktladung Q im Raum:



$\vec{r}$ Feld - Ortsvektor

$\vec{r_q}$ Quellen - Ortsvektor

Bild: Berechnung der Potentialfunktion einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon(\vec{r} - \vec{r_q})}$$

Kartesische Koordinaten x, y, z:

$$(\vec{r} - \vec{r_q}) = \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}$$

$$\varphi\,(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\,\sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}}$$

$$E_x(x, y, z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\ \frac{x - x_q}{\left[\sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}\right]^3}$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\ \frac{y - y_q}{\left[\sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}\right]^3}$$

$$E_z(x, y, z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\ \frac{z - z_q}{\left[\sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}\right]^3}$$

$$\vec{E}\,(x, y, z) = E_x\overrightarrow{a_x} + E_y\overrightarrow{a_y} + E_z\overrightarrow{a_z}$$

Ladung im Ursprung $\vec{r_q} = \vec{o}$:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$E_x(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{x}{\left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right]^3}$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{y}{\left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right]^3}$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{z}{\left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right]^3}$$

Kugelkoordinaten r, φ, υ

$$x = r\cdot\sin\vartheta\cos\varphi,\ y = r\cdot\sin\vartheta\sin\varphi,\ z = r\cdot\cos\vartheta$$

$$\varphi(r,\varphi,\vartheta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{r^2 + r_q{}^2 - 2rr_q(\sin\vartheta\sin\vartheta_q\cos(\varphi-\varphi_q) + \cos\vartheta\cos\vartheta_q)}}$$

$$E_r(r,\varphi,\vartheta) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{r - r_q(\sin\vartheta\sin\vartheta_q\cos(\varphi-\varphi_q) + \cos\vartheta\cos\vartheta_q)}{\left[\sqrt{r^2 + r_q{}^2 - 2rr_q(\sin\vartheta\sin\vartheta_q\cos(\varphi-\varphi_q) + \cos\vartheta\cos\vartheta_q)}\right]^3}$$

$$E_\vartheta(r,\varphi,\vartheta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{-r_q(\cos\vartheta\sin\vartheta_q\cos(\varphi-\varphi_q) - \sin\vartheta\cos\vartheta_q)}{\left[\sqrt{r^2 + r_q{}^2 - 2rr_q(\sin\vartheta\sin\vartheta_q\cos(\varphi-\varphi_q) + \cos\vartheta\cos\vartheta_q)}\right]^3}$$

$$E_\varphi(r,\varphi,\vartheta) = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_q\sin\vartheta_q\sin(\varphi-\varphi_q)}{\left[\sqrt{r^2 + r_q{}^2 - 2rr_q(\sin\vartheta\sin\vartheta_q\cos(\varphi-\varphi_q) + \cos\vartheta\cos\vartheta_q)}\right]}$$

$$\vec{E}(r, \varphi, \vartheta) = E_r\vec{a_r} + E_\varphi\vec{a_\varphi} + E_\vartheta\vec{a_\vartheta}$$

Bemerkung: φ ist das elektrische Potential, aber auch Teil des Koordinatensystems.
$\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}$ ist das Potential differenziert nach dem Winkel φ

Ladung im Ursprung $\vec{r_q} = 0$:

$$\varphi\,(r,\ \vartheta,\ \varphi) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

$$E_r\ (r,\ \vartheta,\ \varphi) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$E_\vartheta\ (r,\ \vartheta,\ \varphi) = 0$$

$$E_\varphi\ (r,\ \vartheta,\ \varphi) = 0$$

Zylinderkoordinaten r, φ, z

$$x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi,\ z = z$$

$$\varphi\,(r,\varphi,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\ \sqrt{(r\cos\varphi - r_q\cos\varphi_q)^2 + (r\sin\varphi - r_q\sin\varphi_q)^2 + (z - z_q)^2}}$$

$$E_r(r,\varphi,z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\ \frac{r - r_q\cos(\varphi - \varphi_q)}{\left[\sqrt{(r\cos\varphi - r_q\cos\varphi_q)^2 + (r\sin\varphi - r_q\sin\varphi_q)^2 + (z - z_q)^2}\right]^3}$$

$$E_\varphi(r,\varphi,z) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\ \frac{r_q\sin(\varphi - \varphi_q)}{\left[\sqrt{(r\cos\varphi - r_q\cos\varphi_q)^2 + (r\sin\varphi - r_q\sin\varphi_q)^2 + (z - z_q)^2}\right]^3}$$

$$E_z(r,\varphi,z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\ \frac{(z - z_q)}{\left[\sqrt{(r\cos\varphi - r_q\cos\varphi_q)^2 + (r\sin\varphi - r_q\sin\varphi_q)^2 + (z - z_q)^2}\right]^3}$$

$$\vec{E}\ (r,\varphi,z) = E_r\vec{a_r} + E_\varphi\vec{a_\varphi} + E_z\vec{a_z}$$

Ladung im Ursprung $\vec{r_q} = 0$:

$$\varphi\,(r,\ \varphi,\ z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$E_r\,(r,\ \varphi,\ z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{r}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}}$$

$$E_\varphi\,(r,\ \varphi,\ z) = 0$$

$$E_z\,(r,\ \varphi,\ z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{z}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}}$$

Nebenrechnung Übung 3 Aufgabe 1

Kugelkoordinaten: Herleitung des Nenners

$$\varphi(r,\varphi,\vartheta)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\underbrace{\sqrt{\left(x-x_q\right)^2+\left(y-y_q\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}}_{=a}}$$

$$a=r^2\cdot\sin^2(\vartheta)\cdot\cos^2(\varphi)+r_q{}^2\cdot\sin^2\left(\vartheta_q\right)\cdot\cos^2\left(\varphi_q\right)-2\cdot r\cdot r_q\cdot\sin(\vartheta)\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin\left(\vartheta_q\right)\cdot\cos\left(\varphi_q\right)$$
$$+r^2\cdot\sin^2(\vartheta)\cdot\sin^2(\varphi)+r_q{}^2\cdot\sin^2\left(\vartheta_q\right)\cdot\sin^2\left(\varphi_q\right)-2\cdot r\cdot r_q\cdot\sin(\vartheta)\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin\left(\vartheta_q\right)\cdot\sin\left(\varphi_q\right)$$
$$+r^2\cdot\cos^2(\vartheta)+r_q{}^2\cdot\cos^2\left(\vartheta_q\right)-2\cdot r\cdot r_q\cdot\cos(\vartheta)\cdot\cos\left(\vartheta_q\right)$$

$$a=r^2\cdot\left(\underbrace{\sin^2(\vartheta)\cdot\left(\overbrace{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}^{=1}\right)+\cos^2(\vartheta)}_{=1}\right)$$
$$+r_q{}^2\cdot\left(\underbrace{\sin^2\left(\vartheta_q\right)\cdot\overbrace{\left(\cos^2\left(\varphi_q\right)+\sin^2\left(\varphi_q\right)\right)}^{=1}+\cos^2\left(\vartheta_q\right)}_{=1}\right)$$
$$-2\cdot r\cdot r_q\cdot\left(\sin(\vartheta)\cdot\sin\left(\vartheta_q\right)\cdot\left(\underbrace{\cos(\varphi)\cdot\cos\left(\varphi_q\right)+\sin\left(\vartheta_q\right)\cdot\sin\left(\varphi_q\right)}_{=b}\right)+\cos(\vartheta)\cdot\cos\left(\vartheta_q\right)\right)$$

Produkte von trigonometrische Funktionen (F+H Seite 39)
$\cos(x)\cdot\cos(y)=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$
$\sin(x)\cdot\sin(y)=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$

$$b=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\varphi-\varphi_q\right)+\cos\left(\varphi+\varphi_q\right)+\cos\left(\varphi-\varphi_q\right)-\cos\left(\varphi+\varphi_q\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\cdot\cos\left(\varphi-\varphi_q\right)\right)=\cos\left(\varphi-\varphi_q\right)$$

$$\varphi(r,\varphi,\vartheta)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\sqrt{r^2+r_q^2-2\cdot r\cdot r_q\cdot\left(\sin(\vartheta)\cdot\sin\left(\vartheta_q\right)\cdot\cos\left(\vartheta-\vartheta_q\right)\right)+\cos(\varphi)\cos\left(\varphi_q\right)}}$$

Zylinderkoodinaten: Herleitung der r- und φ- Komponenten

$$E_r\left(r,\varphi,\upsilon\right)=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)\cdot\cos\left(\varphi\right)+2\cdot\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)\cdot\sin\left(\varphi\right)}{\sqrt{\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}^2}$$

$$=+\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{r\cdot\left(\overbrace{\cos^2\left(\varphi\right)+\sin^2\left(\varphi\right)}^{=1}\right)-r_q\cdot\left(\overbrace{\sin\left(\varphi\right)\cdot\sin\left(\varphi_q\right)}^{=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\varphi-\varphi_q\right)-\cos\left(\varphi+\varphi_q\right)\right)}+\overbrace{\cos\left(\varphi\right)\cdot\cos\left(\varphi_q\right)}^{=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\varphi-\varphi_q\right)+\cos\left(\varphi+\varphi_q\right)\right)}\right)}{\sqrt{\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}^2}$$

$$=+\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{r-r_q\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\cos\left(\varphi-\varphi_q\right)\right)}{\sqrt{\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}^2}$$

$$=+\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{r-r_q\cdot\cos\left(\varphi-\varphi_q\right)}{\sqrt{\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}^2}$$

$$E_\varphi\left(r,\varphi,\upsilon\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)\cdot\sin\left(\varphi\right)+2\cdot\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)\cdot\cos\left(\varphi\right)\right)}{\sqrt{\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}^2}$$

$$=+\frac{1}{r}\cdot\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{\left(\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)\cdot\sin\left(\varphi\right)-2\cdot\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)\cdot\cos\left(\varphi\right)\right)}{\sqrt{\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}^2}$$

$$=+\frac{1}{r}\cdot\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{\left(r\cdot\left(\overbrace{\cos\left(\varphi\right)\cdot\sin\left(\varphi\right)-\sin\left(\varphi\right)\cdot\cos\left(\varphi\right)}^{=0}\right)+r_q\cdot\left(\overbrace{\cos\left(\varphi_q\right)\cdot\sin\left(\varphi\right)}^{=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\varphi-\varphi_q\right)+\sin\left(\varphi+\varphi_q\right)\right)}-\overbrace{\sin\left(\varphi_q\right)\cdot\cos\left(\varphi\right)}^{=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\varphi_q-\varphi\right)+\sin\left(\varphi_q+\varphi\right)\right)}\right)\right)}{\sqrt{\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}^2}$$

$$=+\frac{1}{r}\cdot\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{r_q\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\varphi-\varphi_q\right)\right)-\overbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\varphi_q-\varphi\right)\right)}^{=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\varphi-\varphi_q\right)\right)}\right)}{\sqrt{\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}^2}$$

$$=+\frac{1}{r}\cdot\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{r_q\cdot\sin\left(\varphi-\varphi_q\right)}{\sqrt{\left(r\cdot\cos\left(\varphi\right)-r_q\cdot\cos\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(r\cdot\sin\left(\varphi\right)-r_q\cdot\sin\left(\varphi_q\right)\right)^2+\left(z-z_q\right)^2}^2}$$

Lösung Aufgabe 2 / Übungsblatt 3

2.1

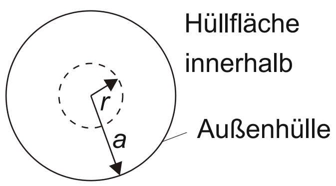
Kugelkoordinaten:

$$dA = r\,\sin\vartheta\,d\varphi\;r\,d\vartheta = r^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta$$
$$dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$$

$$\oiint_A \vec{D}\,d\vec{A} = \iiint_V \rho_V\,dV$$

<u>Innenraum</u> $0 \le r \le a$:

$$\underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} Dr(r)\,r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}_{\text{Flächen-integral}} = \underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\rho_V\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta}_{\text{Volumen-integral}}$$



$\vec{D_r}$ hat überall auf der gewählten Fläche den konstanten Betrag
$D(r)$ $\rightarrow$ kann als konstanter Wert vor das Integral gezogen werden

$$D(r)\,2\pi r^2\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta = \rho_V\,2\pi\,\frac{1}{3}\,r^3\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$D_i(r) = \frac{\rho_V}{3}\,r \qquad\qquad E_i(r) = \frac{\rho_V}{3\varepsilon}\cdot r$$

$$\varphi_i(r) = -\int E_i(r)\,dr = -\frac{\rho_V}{3\varepsilon}\int r\,dr = -\frac{\rho_V}{6\varepsilon}\,r^2 + C_1$$

C_1 kann noch nicht bestimmt werden

<u>Außenraum</u> $r > a$:

$$D(r)\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\rho_V\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$$

Alle Raumladungen bis auf a aufintegrieren

$$D(r)\,2\pi r^2\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta = \rho_V\,2\pi\,\frac{1}{3}\,a^3\cdot\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$D_a(r) = \frac{\rho_V}{3}\,\frac{a^3}{r^2} \qquad\qquad E_a(r) = \frac{\rho_V}{3\varepsilon}\,\frac{a^3}{r^2}$$

$$\varphi_a(r) = -\int \varepsilon_a(r)\,dr = -\frac{\rho_V}{3\varepsilon}\,a^3 \int \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{\rho_V}{3\varepsilon}\,\frac{a^3}{r} + C_2$$

<u>Randbedingungen</u>:

↙Pot. per Definition im $\infty = 0$

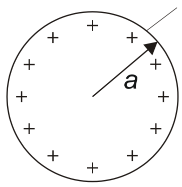
(1) mit $\varphi_a(\infty) = 0$ folgt $C_2 = 0$ $\qquad \varphi_a(r) = \frac{\rho_V}{3\varepsilon}\,\frac{a^3}{r}$

(2) stetiger Übergang $\rightarrow$ $\varphi_i(a) = \varphi_a(a)$ folgt $C_1 = \frac{\rho_V}{2\varepsilon}\,a^2$

$$\varphi_i(r) = \frac{\rho_V}{2\varepsilon}\,a^2 \left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{r^2}{a^2}\right)$$

2.2

$$\oiint D\,dA = Q = \iint_A \rho_A\,dA$$



sehr dünne metallische Oberfläche

Flächenladungsdichte homogen auf Oberfläche verteilt!

kugelsymmetrisches Problem

<u>Innenraum</u> $0 \le r < a$:

$\oiint \vec{D}\,d\vec{A} = 0$ (keine Ladung innerhalb der Hohlkugel)

$D_i(r) = 0;$ $\qquad E_i(r) = 0$ $\qquad$ Innen feldfrei!

$$\varphi = -\int E(r)\,dr \quad \rightarrow \quad \varphi_i = konst$$

<u>Außenraum</u> $r \ge a$:

$$D(r) \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_A\,a^2 \sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta$$

$$D(r)\,2\pi\,r^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta = \rho_A\,2\pi\,a^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$D(r) = \rho_A \frac{d^2}{r^2}; \qquad E_a(r) = \frac{\rho_A}{\varepsilon} \frac{a^2}{r^2}$$

$$\varphi_a(r) = -\int E_a(r)\, dr = -\frac{\rho_A}{\varepsilon} a^2 \int \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{\rho_A}{\varepsilon} \frac{a^2}{r} + C$$

mit $\varphi_a(\infty) = 0$ folgt $C = 0$; $\qquad \varphi_a(r) = \frac{\rho_A}{\varepsilon} \frac{a^2}{r}$

An der Oberfläche der Kugel muss gelten:

$$\varphi_i(a) = \varphi_a(a) = \frac{\rho_A}{\varepsilon}\, a = \varphi_i$$

Lösung Aufgabe 3 / Übungsblatt 3

Kugelsymmetrisches Problem:

$\longrightarrow$ wähle Kugelkoordinatensystem mit Ursprung im Kugelmittelpunkt

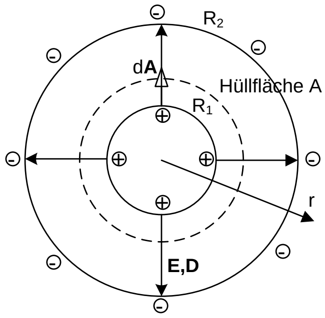


Bild: Kugelkondensator (gesamte Ladung befindet sich auf der Innenelektrode)

Satz vom Hüllenfluß:

$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = Q$$

$$\rightarrow \quad D(r) \oiint_A dA = D(r) \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi = D(r)\, 4\pi r^2 \overset{!}{=} Q$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

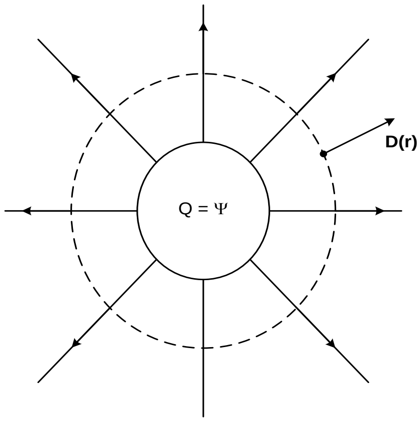
Potentialdifferenz zwischen Innen- und Außenelektrode:

$$U_{12} = \Delta\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_{R1}^{R2} \vec{E}\, d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_{R1}^{R2} \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Kapazität des Kugelkondensators:

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

Lösung Aufgabe 4 / Übungsblatt 3



$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \int_L \rho_L\, dL = Q$$

- Hüllfläche ist ein in der Länge unendlich ausgedehnter Zylinder
- Da unendlich ausgedehnt ist, gibt es keine Randverzerrungen
  $\rightarrow$ nur vom Radius r abhängig

Zylindersymmetrisches Problem

$$\left.\begin{aligned} &\oiint \vec{D}\, d\vec{A} = D(r) \oiint dA = \rho_L \int_L dL \\ &\oiint_A dA = \int_L \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\, d\varphi\, dL = 2\pi r \int_L dL \end{aligned}\right\} D(r)\, 2\pi r \int_L dL = \rho_L \int_L dL$$

$$D(r) = \frac{\rho_L}{2\pi r} \qquad\qquad E(r) = \frac{\rho_L}{2\pi \varepsilon r}$$

$$\varphi(r) = -\int E(r)\, dr = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \int \frac{1}{r}\, dr \quad = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln r + C$$

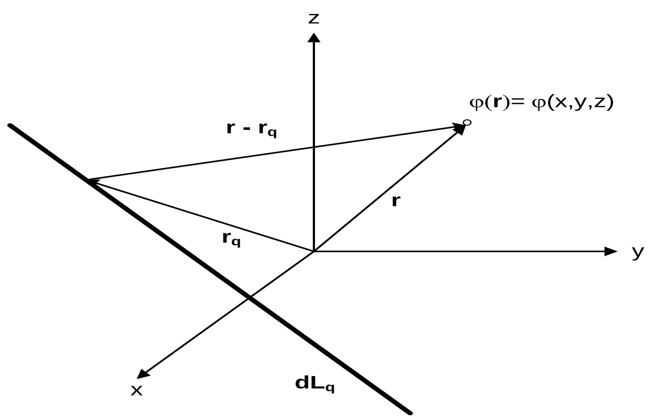
$$= \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{1}{r} + C$$

Beliebige Lage im Raum:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\,\varepsilon\left|\vec{r}-\vec{r_q}\right|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\,\varepsilon}\ln\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r_q}\right|} + C$$

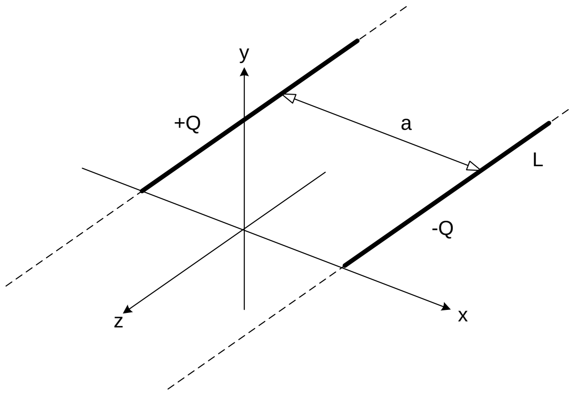
bleibt unbestimmt



Lösung Aufgabe 5 / Übungsblatt 3

$$\rho_{L1} = +\rho_L = \frac{Q}{L}$$

$$\rho_{L2} = -\rho_L = -\frac{Q}{L}$$



<u>Potentialverteilung im Feldraum</u> wird durch Überlagerung der den beiden Linienladungen zuzuordnenden Potentiale bestimmt (Superposition).

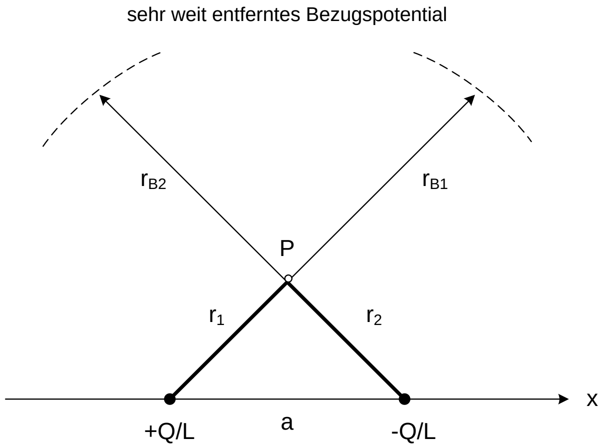
aus Aufgabe 4: $\varphi(r) = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln r + C$

Einführung von Bezugspotential $(\varphi_B = 0)$ in Entfernung r_B:

$\varphi(r_B) = 0$; d.h. $C = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln r_B$

$$\rightarrow \qquad \varphi(r) = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln r + \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln r_B = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_B}{r}$$

Das Bezugspotential kann <u>nicht</u> wie im kugelsymmetrischen Feld als unendlich weit entfernt angenommen werden, da sich sonst ein unendlich großes Potential ergeben würde.



Für die Überlagerung der Potentiale φ_1 und φ_2, die den Ladungen $+Q$ und $-Q$ zugeordnet werden, gilt in einem beliebigen Punkt P (der xy-Ebene):

$$\varphi \quad = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\,\varepsilon} \ln \frac{r_{B_1}}{r_1} - \frac{\rho_L}{2\pi\,\varepsilon} \ln \frac{r_{B_2}}{r_2} = \frac{\rho_L}{2\pi\,\varepsilon} \ln \left(\frac{r_{B_1}}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_{B_2}} \right)$$

Unter der Annahme eines <u>sehr weit entfernten Bezugspotentials</u>, d.h. unter der Annahme

$r_1, r_2, a \ll r_{B_1}, r_{B_2}$ und $r_{B_1} \approx r_{B_2}$

kann der Abstand zum Bezugspotential gekürzt werden.

$$\rightarrow \varphi = \frac{\rho_L}{2\pi\,\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

<u>Äquipotentialflächen</u> $\varphi = konst$ Berechnung der Äquipotentiallinien

d.h. $\frac{r_2}{r_1} = k = konst$

$$r_1^2 = \left(\frac{a}{2} + x \right)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = \left(\frac{a}{2} - x \right)^2 + y^2$$

$$k^2 = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$$

So umformen, dass sich allg. Kreisgleichung in x, y Koordinaten ergeben

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

$$k^2 \cdot r_1^2 = r_2^2$$

$$k^2 \left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \right] = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$$

$$k^2 \left[x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2 \right] = x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2$$

$$(k^2 - 1)\left[x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} \right] + (k^2 + 1)ax = 0 \quad \Big| : (k^2 - 1);\ k^2 \neq 1$$

$$x^2 + \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{(k^2 + 1)^2}{(k^2 - 1)^2} \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + y^2 = 0$$

Die Äquipotentiallinien beschreiben Kreise in der xy Ebene
$\rightarrow$ Kreisgleichung:

$$\underbrace{\left(x+\frac{k^2+1}{k^2-1}\frac{a}{2}\right)^2+y^2}_{(*)} = \left[\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2}-\frac{\overbrace{(k^2-1)^2}^{1}}{(k^2-1)^2}\right]\frac{a^2}{4}$$

$$=\frac{k^4+2k^2+1-(k^4-2k^2+1)}{(k^2-1)^2}\frac{a^2}{4}$$

$$=\frac{k^2}{(k^2-1)^2}a^2=r^2 \quad (**)$$

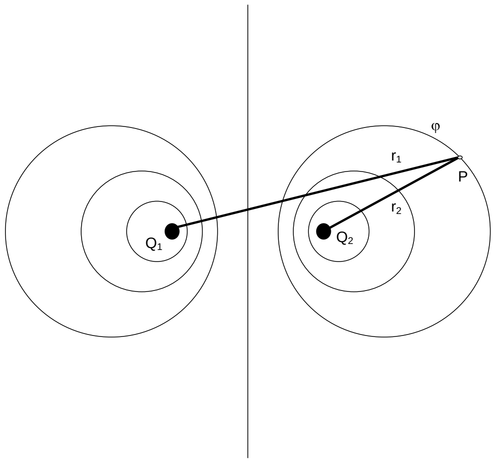
mit Kreismittelpunkten: aus Symmetriegründen liegen alle Kreismittelpunkte auf der x -Achse

$$\Downarrow$$

$$r=0 \qquad \Rightarrow y=0 \qquad \text{(so festgelegt)}$$

$y=0$ und $(*)=(**)$

$$\Rightarrow \qquad x=\pm\frac{k^2+1}{k^2-1}\frac{a}{2}$$



$(**) \Rightarrow$ mit Radien

$$r^2=\frac{k^2}{(k^2-1)^2}a^2$$

$$r=\frac{k}{\left|k^2-1\right|}a$$

Bestimmung von k: $\varphi=\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln k$

$$k=\exp\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\rho_L}\varphi\right)$$

Kreisgleichung der Äquipotentiallinien

$$\Rightarrow r = \frac{\exp\left(\frac{2\pi\,\varepsilon}{\rho_L}\,\varphi\right)}{\left|\left[\exp\left(\frac{2\pi\,\varepsilon}{\rho_L}\,\varphi\right)\right]^2 - 1\right|} \cdot a$$

Lösung zu Aufgabe 6 / Übungsblatt 3

Aufgabe 6.1

Zylindersymmetrisches Problem:

$\longrightarrow$ wähle Zylinderkoordinatensystem. Mittelachse des Zylinders fällt auf z-Achse

Innenraum $0 \le r \le a$:

Hüllenfläche A befindet sich innerhalb des virtuellen Zylinders!

Satz vom Hüllenfluß:

$$\iint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \iiint_V \rho_v \, dV$$

$$\rightarrow \quad D(r) \oiint_A dA = \rho_v \iiint_V dV$$

$$D(r) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} r \, d\phi \, dz = \rho_v \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r' \, dr' \, d\phi \, dz$$

$$\rightarrow \quad D(r) = \frac{1}{2} \rho_v r$$

Feldstärkefunktion: $E_i(r) = \dfrac{D(r)}{\varepsilon} = \dfrac{\rho_v}{2\varepsilon} r$

Potentialfunktion: $\phi_i(r) = -\int E_i(r)\, dr = -\dfrac{\rho_v}{2\varepsilon} \int r \, dr = -\dfrac{\rho_v}{4\varepsilon} r^2 + C_1$

(C_1 kann noch nicht bestimmt werden)

Außenraum $r > a$:

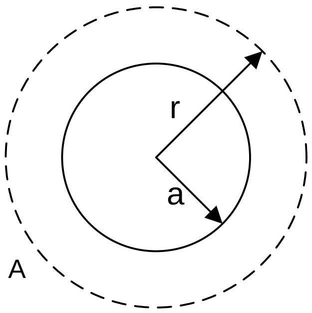


Bild: Virtueller Zylinder, Hüllenfläche befindet sich außerhalb des virtuellen Zylinders!
(gesamte Ladung ist eingeschlossen!)

Satz vom Hüllenfluß:

$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \iiint_V \rho_V \, dV \stackrel{!}{=} Q$$

$$\rightarrow \qquad D(r) \oiint_A dA = \rho_V \iiint_V dV \stackrel{!}{=} Q$$

$$D(r) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} r \, d\phi \, dz = \rho_V \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} r \, dr \, d\phi \, dz$$

$$\rightarrow \qquad D(r) = \frac{1}{2} \rho_V \frac{a^2}{r}$$

Feldstärkefunktion: $E_a(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{\rho_V}{2\varepsilon} \frac{a^2}{r}$

Potentialfunktion: $\phi_a(r) = -\int E_a(r)\, dr = -\frac{\rho_V}{2\varepsilon} a^2 \int \frac{1}{r}\, dr = -\frac{\rho_V}{2\varepsilon} a^2 (\ln r) + C_2$

Randbedingungen:

Um C_2 zu bestimmen müßte ein weiteres Potential gegeben sein. $\phi_a(\infty) \rightarrow 0$ ist nicht möglich, da mit $C_2 = \frac{\rho_V}{2\varepsilon} a^2 (\ln r)$ das Potential immer 0 für den Außenraum betragen würde.

$\phi_i(a) = \phi_a(a)$ (Potential ist stetig):

$$C_1 = \frac{\rho_V}{4\varepsilon} a^2 (1 - 2\ln a) + C_2 \Rightarrow \underline{\phi_i(r) = \frac{\rho_V}{4\varepsilon} a^2 \left(1 - 2\ln a - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) + C_2;}$$

Aufgabe 6.2

Zylindersymmetrisches Problem:

→ wähle Zylinderkoordinatensystem, Mittelachse des Zylinders falle auf z-Achse

Innenraum $0 \leq r < a$:

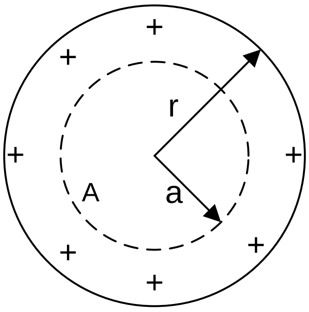


Bild: virtueller Zylinder

Hüllenfläche A befindet sich innerhalb des virtuellen Zylinders!

Satz vom Hüllenfluß:

$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = 0$$ (es befindet sich keine Ladung innerhalb der Hohlkugel)

aus Symmetriegründen heben sich die Feldlinien im Innern des Hohlzylinders auf (aber nur, weil ρ_A homogen verteilt ist)

$\rightarrow \quad D(r) = 0$

Feldstärkefunktion: $E_i(r) = 0$

Potentialfunktion: $\phi_i = konst. \overset{!}{=} \phi_i(a)$

Außenraum $r \geq a$:

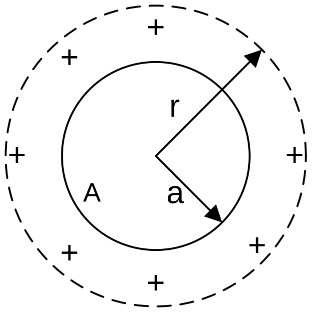


Bild: Hohlzylinder

Hüllenfläche A befindet sich außerhalb des Hohlzylinders

Satz vom Hüllenfluß:

$$\oint\!\!\oint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \iint_A \rho_A \, dA \overset{!}{=} Q$$

$$D(r) \oint\!\!\oint_A dA = \rho_A \iint_A dA \overset{!}{=} Q$$

$$D(r) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} r \, d\phi \, dz = \rho_A \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} a \, d\phi \, dz$$

$$D(r) = \rho_A \frac{a}{r}$$

Feldstärkefunktion: $E_a(r) = \dfrac{D(r)}{\varepsilon} = \dfrac{\rho_A}{\varepsilon} \dfrac{a}{r}$

Potentialfunktion: $\phi_a(r) = -\int E_a(r)\, dr = -\dfrac{\rho_A}{\varepsilon} \int \dfrac{1}{r} dr = -\dfrac{\rho_A}{\varepsilon} a \ln r + C$

(Potential im Außenraum ist nicht eindeutig bestimmbar)

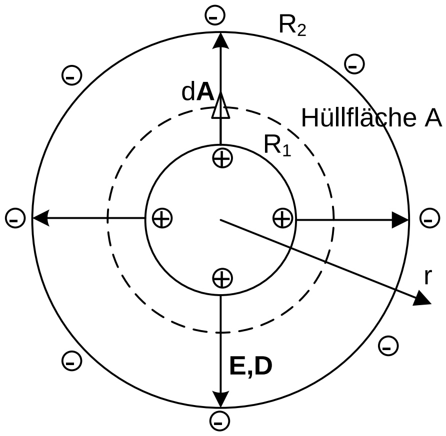
Randbedingung:

$$\underline{\phi_i(a) = \phi_a(a) = -\frac{\rho_a}{\epsilon} \cdot a \cdot ln(a) + C}$$

Lösung Aufgabe 7 / Übungsblatt 3

Aufgabe 1

$$C = \frac{Q}{U} \qquad\qquad U_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$$



$$\oiint D\, dA = Q$$

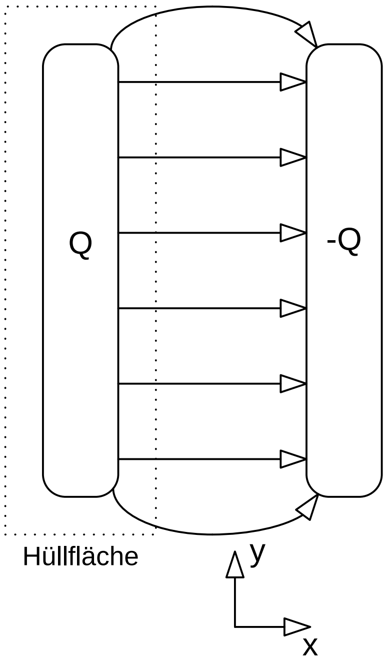
$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{L} r\, d\varphi\, dz = D(r)\, 2\pi r L = Q \quad \rightarrow \quad D(r) = \frac{Q}{2\pi r L}$$

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon r L}$$

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\, d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, dr = \frac{Q}{2\pi \varepsilon L} [\ln r]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\underline{\underline{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \varepsilon L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}}$$

Lösung Aufgabe 8 / Übungsblatt 3



<u>Bild:</u> Plattenkondensator

<u>Satz vom Hüllenfluß:</u>

$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \rho_A \mathrm{A} = +Q$$

aus Symmetriegründen existieren lediglich Feldlinien in x-Richtung
(Randverzerrungen sind zu vernachlässigen!)

$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \iint_A (D(x,y,z)\,\vec{a_x})\,(\vec{a_x}\, dA)$$

$$= \iint_A D\,(\mathrm{x,y,z})\, dA$$

$$= D \iint_A dA$$ auf der Fläche A ist D (nahezu) konstant und kann daher

vor das Integral gezogen werden

$$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = D\,A = \varepsilon\, E\, A \overset{!}{=} +Q$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon A} = konst$$

Potentialdifferenz:

$$U_{12} = \Delta\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_0^d \vec{E}\, d\vec{s}$$

$$= \int_0^d E_x\, dx \qquad (\vec{E} \parallel d\vec{s}; \quad \text{mit } \vec{E} = E_x\, \vec{a_x},\; d\vec{s} = dx\, \vec{a_x})$$

$$= E_x \int_0^d dx$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon A}\, d$$

Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

Lösung Aufgabe 9 / Übungsblatt 3

9.1

$$E(x,y,z) = \frac{1{,}5}{\varepsilon} x^2 y^2 \vec{a}_x + \frac{1}{\varepsilon} x^3 y \vec{a}_y \ in \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$D(x,y,z) = 1{,}5 x^2 y^2 \vec{a}_x + x^3 y \vec{a}_y \ in \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$\Psi = \oiint \vec{D} d\vec{A} = Q$$

Summation der elektrischen Flüsse durch die 6 Flächenelemente des Würfels

$$\Psi = \int_{y=-1}^{1} \int_{z=-1}^{1} (1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y) \Big|_{x=1} (\vec{a}_x dydz) +$$

$$\int_{y=-1}^{1} \int_{z=-1}^{1} (1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y) \Big|_{x=-1} ((-\vec{a}_x)dydz) +$$

$$\int_{x=-1}^{1} \int_{z=-1}^{1} (1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y) \Big|_{y=1} (\vec{a}_y dxdz) +$$

$$\int_{x=-1}^{1} \int_{z=-1}^{1} (1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y) \Big|_{y=-1} ((-\vec{a}_y)dxdz) +$$

$$\int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} (1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y) \Big|_{z=1} (\vec{a}_z dxdy) +$$

$$\int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} (1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y) \Big|_{z=-1} ((-\vec{a}_z)dxdy)$$

$$\Psi = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 1{,}5y^2 dydz + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -1{,}5y^2 dydz + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^3 dxdz + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^3 dxdz$$

$$\Psi = 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^3 dxdz = 2\int_{-1}^{1} x^3 dx \left[z\right]_{-1}^{1} = 4\int_{-1}^{1} x^3 dx = 4\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = 0$$

Das Ergebnis lässt vermuten, dass innerhalb des betrachteten Volumens keinerlei Ladung vorhanden ist.

Stimmt das?
Aufgabe 9.2 gibt Aufschluss darüber.

9.2

$$\Psi = \int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y)\,\Big|_{x=1}(\vec{a}_x dydz) +$$

$$\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y)\,\Big|_{x=0}((-\vec{a}_x)dydz) +$$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y)\,\Big|_{y=1}(\vec{a}_y dxdz) +$$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y)\,\Big|_{y=0}((-\vec{a}_y)dxdz) +$$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y)\,\Big|_{z=1}(\vec{a}_z dxdy) +$$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(1{,}5x^2y^2\vec{ax} + x^3y\vec{a}_y)\,\Big|_{z=0}((-\vec{a}_z)dxdy)$$

$$\Psi = \int_0^1\int_0^1 1{,}5y^2dydz + 0 + \int_0^1\int_0^1 x^3dxdz + 0$$

$$\Psi = \int_0^1 1{,}5y^2dy\,[z]_0^1 + \int_0^1 x^3dx\,[z]_0^1$$

$$= \int_0^1 1{,}5y^2dy + \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{2}\left[y^3\right]_0^1 + \frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,[C]$$

Das Ergebnis zeigt, dass sehr wohl Ladungen innerhalb des Würfels vorhanden sind. Der Satz vom Hüllenfluß gibt also keine Auskunft über die tatsächlich vorhandenen Ladungen innerhalb eines betrachteten Volumens, sondern macht eine integrale Betrachtung über die Wirkung aller im Volumen enthaltenen Ladungen als Quelle bzw. Senke nach außen.